INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

Association d'éducation
Organisme d'intérêt général à caractère éducatif
Établissement libre d'enseignement supérieur

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

MATHÉMATIQUES II

Toutes options

DURÉE : 3 heures — COEFFICIENT : 4
COEFFICIENT : 5 (réservé au BAC technique)

PARTIE PRÉLIMINAIRE

On désignera par une même lettre un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associée.

1) Un nombre réel a est algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(a)=0$.

a) Préciser pourquoi, dans cette définition, on peut remplacer $\mathbb{Q}[X]$ par $\mathbb{Z}[X]$ (ensemble des polynômes à une indéterminée X à coefficients entiers).

b) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique puis donner (en le justifiant) un exemple simple de nombre algébrique non rationnel.

2) N.B. Cette question constitue un exercice indépendant.

a) Factoriser X^5-1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis $X^4+X^3+X^2+X+1=P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) a étant solution dans $\mathbb{C}$ de $P(x)=0$, montrer que $b=a+\frac{1}{a}$ est solution réelle d'une équation du second degré à coefficients entiers que l'on précisera (on pourra diviser chaque membre de l'égalité $P(a)=0$ par a^2). Même question pour $b'=\frac{b}{2}$.

c) Déduire de ce qui précède que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est algébrique. Est-il rationnel ?

3) a) e désignant la base de la fonction logarithme népérien, et n un entier naturel non nul quelconque, justifier la double inégalité :

$$1+\frac{1}{1!}+\ \ldots\ +\frac{1}{n!}<e<1+\frac{1}{1!}+\ \ldots\ +\frac{1}{n!}+\frac{1}{n.n!}\quad (1)$$

Pour cela, sachant que $e=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}$, on pourra établir que $\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{1}{p!}<\frac{1}{n.n!}$ ou montrer que les expressions encadrant e dans (1) définissent des suites adjacentes.

b) En supposant $e=\frac{p}{q}$, $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, et en appliquant (1) à un entier n bien choisi, montrer que l'on aboutit à une absurdité.
Conclure.

Le but du problème est de prouver que e n'est pas algébrique. Tout résultat non démontré peut être utilisé pour résoudre les questions suivantes mais on demande de le signaler clairement.

I

1) Soit f une fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré n. Soient w, a, b des réels. Montrer que

$$\int_a^b e^{wx}f(x)\,dx=\left[e^{wx}\left(\frac{f(x)}{w}-\frac{f^{(1)}(x)}{w^2}+\ \ldots\ +(-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{w^{n+1}}\right)\right]_b^a$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.

2) On pose $F(x)=f(x)+f^{(1)}(x)+\ \ldots\ +f^{(n)}(x)$

Déduire de 1) que $F(b)=e^b F(0)-e^b\int_0^b f(x)\,e^{-x}dx$.

3) On suppose qu'il existe un polynôme de P de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(e)=0$ et on pose $P(X)=a_0+a_1X+\ \ldots\ +a_mX^m$.

Montrer alors que pour toute fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{m}a_iF(i)+\sum_{i=0}^{m}a_ie^i\int_0^i f(x)\,e^{-x}dx=0\quad (2)$$

F étant définie comme en 2).

4) La deuxième partie du problème consiste à mettre en évidence une certaine fonction polynôme ne satisfaisant pas à (2). Quelle sera alors la conclusion ?

II

1) f et g étant des fonctions dérivables à l'ordre k, établir la formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j f^{(j)}g^{(k-j)}\qquad \text{où } C_k^j=\frac{k!}{j!\,(k-j)!}$$

2) m étant le degré du polynôme P dont on a supposé l'existence au I 3), et p un entier naturel non nul, on pose :

$$f_p(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ \ldots\ (x-m)^p$$

a) Quel est le degré de la fonction polynôme f_p ?

b) Soit i un entier de l'intervalle $[1, m]$. On désigne par g_{pi} la fonction polynôme telle que :

$$f_p(x)=\frac{1}{(p-1)!}(x-i)^p\,g_{pi}(x)$$

Calculer la dérivée d'ordre k de f_p en fonction des dérivées successives de g_{pi}.

c) Montrer que : (u) $\quad k<p\Rightarrow f_p^{(k)}(i)=0$

(v) $\quad k\geqslant p\Rightarrow f_p^{(k)}(i)=p\,C_k^p\lambda_{pik}$

λ_{pik} étant un entier relatif.

d) F_n étant définie à partir de f_p comme dans I 2), déduire de c) que :

3) On désigne par h_p la fonction polynôme telle que :

$$f_p(x) = \frac{1}{(p-1)!}\, x^{p-1}\, h_p(x)$$

a) Calculer la dérivée d'ordre k de f_p en fonction des dérivées successives de h_p.

b) Montrer que : (u) $\quad k < p-1 \Rightarrow f_p^{(k)}(0) = 0$

(v) $\quad f^{(p-1)}(0) = [(-1)^m\, m!]^p$

(w) $\quad k \geqslant p \Rightarrow f^{(k)}(0) = C_k^{p-1}\, \mu_{pk}$

μ_{pk} étant un entier relatif divisible par p.

4) a) En utilisant les questions II 2) et 3), montrer que l'on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\, F_p(i) = a_0\, [(-1)^m\, m!]^p + pI \quad \text{avec } I \in \mathbb{Z}.$$

b) En déduire que si p est un entier premier vérifiant $p > a_0$ et $p > m$, alors $\sum_{i=0}^{m} a_i\, F_p(i)$ est un entier non nul.

5) a) Montrer que, pour tout réel x de $[o, m]$, on a :

$$|f_p(x)| \leqslant \frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1}$$

b) En déduire que :

$$\left| \sum_{i=0}^{m} a_i e^i \int_o^i f_p(x)\, e^{-x}\, dx \right| \leqslant M\, \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\, e^m$$

avec $M = \sum_{i=0}^{m} |a_i|$

c) On pose, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\psi(p) = M\, \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\, e^m$

Déterminer $\lim_{p \to +\infty} \psi(p)$

6) Des questions II 4) b) et 5) c), déduire qu'il existe un entier p pour lequel la fonction polynôme f_p ne satisfait pas à l'égalité (2) du I.